

# Bremsstrahlung

Moacyr Vieira Botelho Junior, Instituto de Física de São Carlos - USP

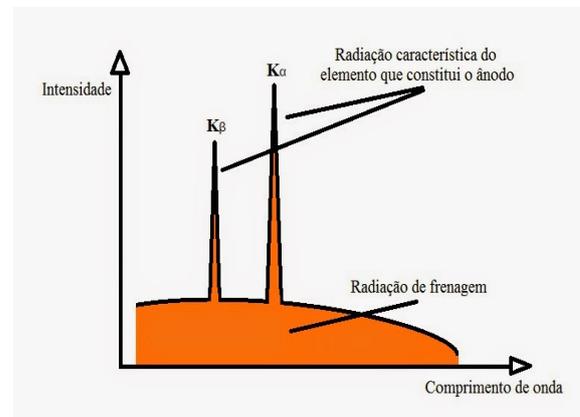
Junho, 2018

Esta monografia é um estudo dirigido sobre a teoria do bremsstrahlung. Nela estão discutidas a teoria clássica de radiação de uma carga acelerada, a teoria da emissão de radiação de partículas em colisões Coulombianas e também a do bremsstrahlung térmico. Os resultados são discutidos fazendo análises sobre o comportamento nos limites clássico-relativístico. Por fim, é feita uma abordagem da importância do bremsstrahlung na astrofísica, em específico radiação emitida em ambientes hostis, como em plasma quente.

## 1 Introdução

A radiação eletromagnética é um fenômeno físico que está presente em nosso cotidiano. Seja com ondas que formam redes de celular e internet, na medicina, com raios-X ou mesmo com partículas cósmicas que diariamente atingem a atmosfera do nosso planeta. Em 1895, W. Roëntgen estudava a condução de eletricidade em um tubo de Crookes[1]. No experimento havia um gás, que estava a uma pressão menor que a atmosférica, sujeito a uma alta tensão. Havia duas placas metálicas, de tal forma que quando raios catódicos (elétrons) fossem liberados eles colidissem com as moléculas do gás ionizando-o. Essa ionização liberava uma luz fluorescente no tubo e ao ver essa luz, Roëntgen pôs sua mão na frente do tubo. Como resultado de sua ação, viu a imagem de seus ossos ser projetada em uma tela de fundo. Essa radiação foi chamada de raios-X. O que de fato Roëntgen havia descoberto é que os raios-X são gerados quando os elétrons são acelerados em um tubo de raios catódicos e ao colidirem com um alvo metálico, emitem radiação. Existem dois tipos de raios-X: o característico, que depende do tipo do material em análise e o de espectro contínuo, que é a chamada radiação de frenamento, ou *bremsstrahlung*. A figura 1 mostra o espectro de raios-X.

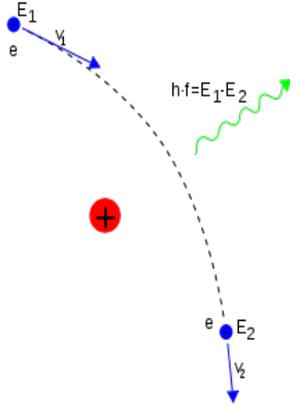
O objetivo desse trabalho é estudar fenômenos que geram radiação, em específico o bremsstrahlung. A matéria, em sua essência, é composta de núcleos atômicos e elétrons. Quando uma carga puntiforme em movimento, tal como um elétron ou um íon, é de-



**Figura 1:** Imagem ilustrativa do espectro de raio-X, gerado quando uma partícula carregada atinge um alvo metálico. Em destaque as duas linhas características e o espectro contínuo do bremsstrahlung. Créditos: [naciencias.blogspot.com](http://naciencias.blogspot.com)

sacelerada por efeito de um campo elétrico, ela perde energia cinética liberando radiação eletromagnética. De forma geral, quando uma partícula carregada é desacelerada por um campo, conforme a figura 2, liberando radiação, a esta damos o nome de bremsstrahlung. Para desenvolver alguns exemplos, serão apresentados alguns fatores fundamentais da teoria de radiação eletromagnética, necessários para entendimento desse projeto.

A seguir serão discutidos três exemplos: o bremsstrahlung em colisões Coulombianas, o bremsstrahlung térmico e a importância do bremsstrahlung no contexto astrofísico.



**Figura 2:** Imagem esquemática de uma partícula de carga  $e$  que sente um campo gerado por uma carga positiva alterando sua velocidade  $v_1 \rightarrow v_2$  e liberando energia  $hf$ . Créditos: [en.wikipedia.org/wiki/Bremsstrahlung](http://en.wikipedia.org/wiki/Bremsstrahlung)

## 2 Radiação de Cargas Pontuais

Sabemos que a forma mais geral de descrever um campo eletromagnético de uma carga é utilizando as equações de Liénard-Wiechert, uma vez que ela contém termos tanto para cargas estáticas quanto em movimento. Dados os potenciais  $\phi(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  calculamos os campos que, para uma carga pontual em movimento, são dados por [2]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q' R}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})], \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{R} \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

onde  $q' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e  $\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}$ . A potência eletromagnética total radiada por uma fonte, que atravessa uma determinada área, é

$$P_{tot} = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}. \quad (3)$$

Substituindo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  na equação (3), obtemos a potência eletromagnética total liberada. Porém, os termos de radiação são apenas aqueles que possuem um valor finito quando se toma  $P_{tot}(r \rightarrow \infty)$ .

Escolhendo uma superfície esférica com raio  $a$ , quando tomamos  $a \rightarrow \infty$ , os termos Coulombianos da integral serão nulos<sup>1</sup>. Porém, nota-se que há termos de  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  proporcionais a  $1/r^2$ . Estes são os termos de interesse, pois a radiação provém dos termos não estáticos, ou seja, de cargas em movimento.

<sup>1</sup>Serão nulos, pois  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \propto r^{-4}$ . Quando calculada a integral e aplicado  $r \rightarrow \infty$ , esse termo tende a zero.

Calculando explicitamente a potência radiada, obtemos a fórmula de Larmor para o caso em que  $v \ll c$ . Para o caso geral, a expressão para a potência é [2]

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 \right). \quad (4)$$

Essa é conhecida como fórmula de Liénard-Larmor, e é uma equação que inclui o princípio da relatividade para uma carga acelerada. Se o movimento for em linha reta tal que  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$ , o segundo termo entre parêntesis da equação (4) será nulo. Essa é a teoria que descreve classicamente o bremsstrahlung, ou seja, a radiação emitida por uma carga pontual quando desacelerada ao atingir um alvo metálico. Um fato curioso é que a potência liberada não depende da partícula carregada estar sendo acelerada, ou desacelerada, ela só depende da velocidade da carga.

## 3 Bremsstrahlung em colisões Coulombianas

Uma maneira comum de emitir radiação é colidindo uma partícula pontual carregada com um núcleo [3]. Por este ter uma carga efetiva bem maior do que um elétron, os efeitos de deflexão sobre o núcleo atômico podem ser desprezados. Aplicando o conhecimento sobre colisão clássica (Espalhamento Rutherford), a seção de choque diferencial é dada por [4]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left( \frac{2zZe^2}{pv} \right)^2 \frac{1}{(2 \sin(\theta'/2))^4}, \quad (5)$$

onde  $ze$ ,  $p$  e  $\theta'$  são, respectivamente, a carga, o momento e o ângulo de espalhamento da partícula incidente e  $Ze$  é a carga do alvo. Nosso interesse é saber a radiação liberada por essa colisão, logo, é conveniente definir a transferência de momento  $Q$  e a seção de choque diferencial de radiação

$$Q^2 = 2p^2(1 - \cos(\theta')) \quad (6)$$

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ} = \frac{dI(\omega, Q)}{d\omega} \frac{d\sigma_s(Q)}{dQ}, \quad (7)$$

na qual  $dI/d\omega$  é a intensidade de energia liberada em uma colisão por unidade de frequência, que tem transferência de momento  $Q$ . Para obter a seção de choque total de radiação, calculamos a integral sobre todos os possíveis momentos  $Q$  e finalmente obtemos

$$\frac{d\chi}{d\omega} \approx \frac{16Z^2e^2}{3c\beta^2} \left( \frac{z^2e^2}{m_e c^2} \right)^2 \ln \left( \frac{Q_{max}}{Q_{min}} \right). \quad (8)$$

Nesse resultado, foi assumido que  $dI/d\omega$  varia muito lentamente com a frequência, uma vez que  $Q$  não é muito grande. O outro fato que foi assumido é que existem limites para  $Q$ . Uma vez que o momento esteja fora desse espectro, o resultado da equação (8) não é mais válido. Para determinar  $Q_{min}$  e  $Q_{max}$  serão analisadas colisões em três regimes.

### 3.1 Bremsstrahlung clássico

Classicamente, sabemos que  $\beta \ll 1$  e o limite para a transferência de momento é apenas cinemático, ou seja  $Q_{max} = 2m_e v$ . Definindo o parâmetro

$$\eta = \frac{zZe^2}{\hbar v}, \quad (9)$$

é possível verificar que, no caso clássico,  $\eta > 1$  [4]. A transferência de momento pode ser estimada fazendo a integral temporal da força elétrica e o limite inferior de  $Q$  é determinado pela relação entre frequência e tempo de colisão

$$Q \approx \frac{2zZe^2}{bv}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{v}{b}. \quad (11)$$

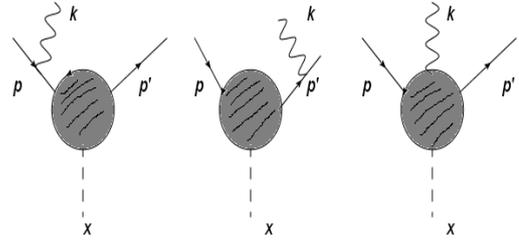
Dessa forma, podemos escrever a equação (10) em função de  $\omega$  e assim determinar a transferência de momento  $Q_{min} = 2zZe^2\omega/v^2$ , obtendo explicitamente a seção de choque de radiação

$$\frac{d\chi_{clas}}{d\omega} \propto \frac{1}{\beta^2} \ln \left( \frac{\lambda m_e v^3}{zZe^2\omega} \right). \quad (12)$$

Nesta equação,  $\lambda$  é o número de ordem unitário que indica quando a intensidade vai a zero, na região próxima de  $\omega\tau = 1$ . A energia máxima que um fóton pode ter é basicamente  $E_{cin}/\eta$ . No regime clássico  $\eta$  é sempre maior que 1, implicando que o espectro clássico de colisões Coulombianas está confinado em uma região de baixas frequências, uma vez que a energia máxima dos fótons é bem menor que a energia cinética da partícula incidente.

### 3.2 Bremsstrahlung não-relativístico

Para partículas com  $\eta < 1$ , entretanto não-relativísticas, é necessário considerar conservação de energia e momento, incluindo o fóton. Esse fato não foi necessário classicamente, pois o espectro deste se restringe ao regime de fótons de baixas energias. A energia inicial  $E$  é puramente cinética, da partícula carregada. Após o choque, a energia da partícula



**Figura 3:** Os diagramas de Born ilustram uma partícula de momento  $p$  colidindo. Nos dois diagramas mais à esquerda, há um fóton sendo emitido de uma linha externa do vértice (antes e depois da colisão, respectivamente) e à direita o fóton é emitido do interior do vértice de espalhamento.

incidente é  $E' < E$  e a energia do fóton liberado é  $\hbar\omega$ . A equação para transferência de momento nos diz que  $Q^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k})^2$ . No entanto, podemos desprezar o momento do fóton, uma vez que este é bem menor comparados a  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$ . De forma análoga ao modelo clássico,  $Q_{max}$  é determinado pela cinemática, mas  $Q_{min}$ , que antes era calculado pelo tempo de colisão, agora também é determinado pela cinemática. Com esse argumento, temos que<sup>2</sup>

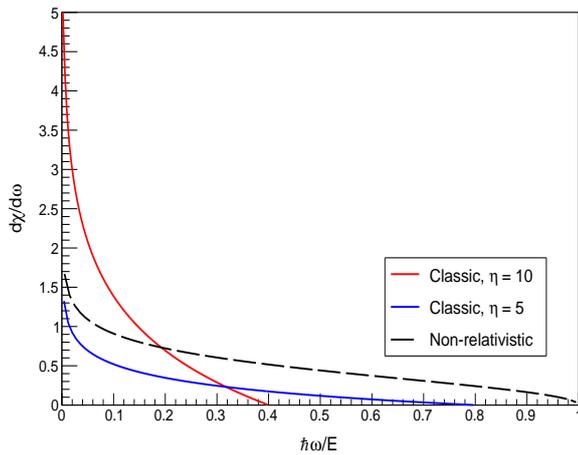
$$\frac{Q_{max}}{Q_{min}} = \frac{p + p'}{p - p'} = \frac{(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega}. \quad (13)$$

A seção de choque de radiação é, portanto

$$\frac{d\chi_{NR}}{d\omega} \propto \frac{1}{\beta^2} \ln \left( \frac{\lambda' (\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega} \right). \quad (14)$$

Na equação (14), se aplicarmos  $\lambda' = 1$  temos um resultado proveniente da aproximação de Born que foi calculado primeiramente por Bethe e Matthews, em 1934. Apenas aplicando argumentos semi-clássicos foi possível obter o resultado correto da mecânica quântica. Isso porque a cinemática do sistema pode ser interpretada com diagramas da mecânica quântica. De acordo com a figura 3, nos dois diagramas da esquerda um fóton é emitido antes e depois da colisão, respectivamente. Ambos envolvem propagadores para a partícula, entre o vértice de espalhamento e o vértice do fóton. No diagrama à direita, não há essa linha do propagador e a energia radiada pelo fóton é muito menor, comparando com os dois casos anteriores. A contribuição desses três diagramas se somam coerentemente, porém apenas linhas externas radiam energia significativa, uma vez que a contribuição do diagrama com linha interna pode ser desprezado [4].

<sup>2</sup>Na equação (13) usamos o fato de que  $E = p^2/2m_e$  além de que  $E' = E - \hbar\omega$ .



**Figura 4:** Gráficos comparando o modelo de bremsstrahlung clássico e o não-relativístico. Com um  $\eta$  se aproximando de 1, notamos que a curva clássica tende ao modelo de Bethe-Heitler, que contém o resultado proveniente da mecânica quântica (aproximação de Born).

No caso clássico a constante  $\eta$  limita o valor máximo da energia do fóton liberado, restringindo a seção de choque de radiação ao regime de baixas frequências. Já para o caso não-relativístico,  $\eta < 1$  e isso implica que a energia radiada pelo fóton pode ser estendida até um regime onde  $\hbar\omega = E$ , como mostra a figura 4.

### 3.3 Bremsstrahlung relativístico

Para partículas relativísticas, devem ser alterados dois fatores principais. O primeiro é que a transferência máxima de momento não é mais determinada pela cinemática, uma vez que os resultados obtidos nas equações (12) e (14) eram válidos somente para  $Q < 2m_e c$ . Como agora, em geral,  $Q > 2m_e c$ , é necessário aplicar outro resultado.<sup>3</sup> Esse resultado diz que  $Q_{max} \approx 2m_e c$ . O segundo fator a ser alterado é que o momento do fóton não pode ser negligenciado, como foi feito no caso não-relativístico. Para determinar  $Q_{min}$  tomamos a diferença entre os momentos iniciais e finais e fazemos uma aproximação de Taylor no cálculo dos momentos  $p$  e  $p'$ , uma vez que podemos considerar que  $E \gg m_e^2 c^4$ . Dessa forma,  $Q_{min} \approx m_e^2 c^3 \hbar\omega / (2EE')$ . Finalmente, temos a seção de choque de radiação para partículas relativísticas, que é

$$\frac{d\chi_{Rel}}{d\omega} \propto \ln \left( \frac{\lambda'' EE'}{m_e c^2 \hbar\omega} \right). \quad (15)$$

<sup>3</sup>Para o caso clássico e não-relativístico,  $\frac{dI}{d\omega} \propto Q^2$ . Porém, quando  $Q > 2m_e c$ , temos que  $\frac{dI}{d\omega} \propto \ln \gamma$ , ou seja, independe de  $Q$  [4].

Essa equação (15) também pode ser obtida através da (14) no limite relativístico com a energia do fóton satisfazendo  $E \gg \hbar\omega$ .

## 4 Importância em astrofísica

Na seção anterior vimos a emissão de radiação proveniente de uma colisão de uma partícula carregada em três regimes. Nesta seção será dado um enfoque maior para colisões clássicas e não-relativísticas no contexto astrofísico.

### 4.1 Íons e plasma quente

A emissão de bremsstrahlung está associada com regiões quentes do universo, tais como atmosferas estelares ou regiões centrais de AGN (Active Galactic Nuclei) [7]. A razão para esse fato é que são necessárias temperaturas muito altas para manter um plasma que contenha íons e elétrons livres na presença de campos eletromagnéticos. Quando ocorre uma colisão Coulombiana, os elétrons são fortemente acelerados, emitem vários fótons e escapam da nuvem (região com plasma que contém os íons). A energia radiada pela partícula pode ser aproximada utilizando a fórmula de Larmor, desde que o processo não seja relativístico. A energia total que é liberada nessa nuvem obedece a uma distribuição de Maxwell. Com esse procedimento dito acima é possível caracterizar dois parâmetros físicos muito importantes. A temperatura  $T$  e a medida de emissão  $\epsilon$ , são as variáveis que caracterizam a região de emissão de partículas.

### 4.2 Bremsstrahlung térmico

Para partículas de altas velocidades, no entanto não-relativísticas, na qual temos  $v > \left(\frac{Z}{137}\right)c$ , existem restrições quânticas quando tratamos a interação de uma partícula altamente energética com um alvo[5]. Do Princípio da Incerteza temos que  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ , no qual  $\Delta x$  nesse contexto é um parâmetro de impacto  $b_{min}$ . Em ambientes hostis, como aglomerados de galáxias, temos uma temperatura altíssima da ordem de  $10^4 K$  e os elétrons, ao serem acelerados, liberam radiação na frequência de raio-X. A intensidade de radiação liberada por um elétron desse plasma é

$$I(\omega) = \frac{4Ze^6}{3\pi^2} \frac{N}{m_e^2 v c^3} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right), \quad (16)$$

onde  $N$  é a densidade de núcleos e  $b_{max}$  e  $b_{min}$  são parâmetros de choque clássico e não-relativístico da seção 3. Para calcular a distribuição de velocidades

das partículas de um gás clássico a temperatura  $T$  aplicamos a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Esse é o caso que chamamos de bremsstrahlung térmico. A densidade eletrônica nesse gás, contida entre  $v$  e  $v + dv$  é dada por

$$N_e(v)dv = 4\pi N_e \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} dv. \quad (17)$$

No regime de baixas frequências, podemos obter um resultado aproximado fazendo  $\frac{m_e v^2}{2} = \frac{3k_B T}{2}$  e substituindo a equação (17) na (16)

$$I(\omega) \approx \frac{Z^2 e^6 N N_e}{3\sqrt{3} c^3 m_e^2} \left( \frac{m_e}{k_B T} \right)^{1/2} g(\omega, T). \quad (18)$$

Na equação (18),  $g(\omega, T)$  é conhecido como fator de Gaunt[6]

$$g(\nu, T) = \int_v^\infty \frac{1}{\nu} f(\nu) \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) d\nu. \quad (19)$$

Os valores aproximados para esse fator de Gaunt vão de 1 a 1,5. Esses limites definem a região limite em que é possível haver bremsstrahlung. Integrando  $I(\omega)$ , obtemos a emissividade total de radiação, ou perda de energia do plasma por bremsstrahlung

$$\epsilon = 4\pi \int_0^\infty I(\omega') d\omega' \approx 1.4 \times 10^{-14} N N_e \langle g \rangle \sqrt{T}, \quad (20)$$

onde  $\langle g \rangle$  é o valor médio do fator de Gaunt sobre todas as frequências.

Podemos interpretar o espectro da equação (18) em baixas energias como sendo a "região de Rayleigh-Jeans". Nessa região o regime é clássico, ou seja de baixas velocidades, onde podemos associar a velocidade desses elétrons com a temperatura  $T$  do plasma, uma vez que a distribuição de velocidades é Maxwelliana. Para a região de altas energias, onde a energia dos fótons emitido é maior que a dos elétrons, apenas os elétrons mais energéticos irão colidir com os íons para emitir fótons bremsstrahlung de alta energia. Existem limites nos quais o fator de Gaunt limita a emissão de bremsstrahlung. Quando um elétron possui energia  $E_{cin} \approx h\nu$ , ele está no limite da região proibida, uma vez que  $\langle g(\nu, T) \rangle \propto \ln(mv^2/h\nu)$ . Na região "proibida", onde  $g = 0$ , os fótons não podem possuir, de forma individual, uma energia cinética maior que a dos elétrons, a menos que sejam capturados em um estado ligado. Dessa forma há radiação livre-ligado, mas não há bremsstrahlung. Assim só há emissão em que  $h\nu \gg k_B T$  na cauda da distribuição de Maxwell.

## 5 Conclusão

Nessa monografia foi mostrada a teoria clássica do bremsstrahlung. Na seção 3 foram estudados casos em que uma partícula carregada colide com um alvo, emitindo radiação. Foram estudados três regimes para que fosse possível calcular  $Q_{min}$  e  $Q_{max}$  e com isso, determinar a seção de choque de radiação. Uma aplicação direta desse estudo é o conteúdo da seção 4. Nela foram utilizados argumentos clássicos em um regime não-relativístico para saber a quantidade de radiação emitida por elétrons, que colidem com íons, em um plasma. Isso é um assunto de pesquisa de interesse astrofísico, como mostram as referências [6] e [7]. Contudo, esses são alguns argumentos de que a teoria clássica do bremsstrahlung é importante em pesquisas científicas atuais.

## Referências

- [1] [www.if.ufrgs.br/tex/fis142/fismod/](http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/fismod/)
- [2] Courteille, Ph. W., *Aulas em física para pós-graduação Eletrodinâmica*, Instituto de Física de São Carlos-USP, 2018.
- [3] Landau, L. and Lifshitz, E., *The Classical Theory of Fields*, Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the U.S.S.R., 1951.
- [4] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2<sup>nd</sup> Edition. University of California, Berkeley, 1975.
- [5] [www.das.inpe.br/alex/Ensino/cursos/proc\\_radI/notas\\_de\\_aula\\_PR1.pdf](http://www.das.inpe.br/alex/Ensino/cursos/proc_radI/notas_de_aula_PR1.pdf)
- [6] [kestrel.nmt.edu/~lyoung/426/Chap4.pdf](http://kestrel.nmt.edu/~lyoung/426/Chap4.pdf)
- [7] C. L. Sarazin, Phys. Plasmas **10**, 1992 (2003) doi:10.1063/1.1556300 [astro-ph/0301178].